

Wiskunde: vakspecifieke toelichting en tips

Met deze voorbeelden van taken voor de wiskundelessen willen wij verschillende ideeën illustreren. Ten eerste geven zij een idee wat bedoeld wordt met hele-taak-eerst en hulp op maat. Natuurlijk zullen vele leerlingen niet direct een oplossing van het gestelde probleem zien. Maar in plaats vooraf alle hulp in te bouwen in de opgaven of serie opgaven, doen we dat pas later: hulp op maat. Ten tweede geven deze opgaven een illustratie van wat wij bedoelen met wiskundige denkactiviteiten. Ook daarvoor geldt dat veel docenten bang zijn dat die wiskundige denkactiviteiten veel tijd zullen kosten, dat ze naast de bestaande opgaven komen en dat zwakke leerlingen onoverkomelijke moeilijkheden zullen ondervinden. Ten derde moeten deze voorbeelden ook aspecten benadrukken die wij onderbelicht vinden in het huidige onderwijs. Die hebben te maken met oriënteren op leerstof en de koppeling aan bestaande kennis aan de ene kant en het integreren van nieuwe kennis, probleem-aanpak bij het oplossen van problemen, modelleren en het redeneren, argumenteren en bewijzen aan de andere kant. Deze laatste categorieën bevatten zeker veel elementen van wiskundige denkactiviteiten.

Deze wiskundige denkactiviteiten (WDA) hebben binnen de nieuwe wiskundeprogramma's een centrale rol gekregen. De vernieuwingscommissie wiskunde onderwijs (Ctwo) onderscheidt de volgende denkactiviteiten: analytisch denken & probleem oplossen, abstraheren, structureren & ordenen, logisch redeneren & bewijzen, modelleren & algebraïseren, formules manipuleren.

Onderstaande voorbeelden starten steeds met een korte beschrijving van onderwerp, het doel van de taak en hoe de behandeling in een regulier boek/les plaatsvindt. Het doel van de taak kan zijn nadenken en/of situeren van een nieuw wiskundig concept, of het toepassen van nieuw geleerd wiskundig gereedschap of het toepassen van wiskundige kennis en vaardigheden in een groter en breder probleem of het leren van probleem aanpak of het leren van samenhang tussen wiskundige concepten en zo overzicht aan te brengen. Na de hele taak volgen ideeën over de wijze in de klas aan de hele taak gewerkt kan worden en de eventuele hulp die geboden kan worden. Als afsluiting worden alternatieven (variaties op de hele taak) gegeven.

In het Handboek Wiskunde didactiek wordt betoogd dat de wiskundige denkactiviteiten in alle fasen van het leerproces ingezet kunnen worden. Bij de voorbeelden is aangegeven in welke fase van het leerproces ingezet kunnen worden. Veel voorbeelden zijn bewerkingen van opgaven die we in schoolboeken vinden.

Bij het ontwerpen van vele voorbeelden hebben we o.a. gebruik gemaakt van de ideeën van M. Swan en de digitale bijlage van het Handboek Wiskunde didactiek <http://www.epsilon-uitgaven.nl/E72.php>.

Hulp bij het ontwerpen van hele taken

- Focus op KERN; die moet erin, stel die centraal. Indien mogelijk een denkcontext erbij (context waarin leerlingen kunnen denken en die helpt bij ontwikkelen concept (betekenisvolle context)).
- Start met concrete (voor leerlingen betekenisvolle) situatie; later komt generaliseren, abstraheren, formaliseren.
- Omdraaien en weglaten; haal toepassingsopgaven of opgaven met kern naar voren; streep alle tussenvragen in eerste instantie weg.
- Kijk naar voorbeelden in andere vakken
- Laat tussenvragen weg (later is dit de hulp)
- Vraag om wiskundige denkactiviteiten
- Gebruik vragen als
 - Welke beelden heb je bij ...?
 - Wat is het? Hoe herken je het? Hoe werk je ermee?
 - Zoek het verband of patroon
 - Schat (of geef een (kwalitatieve) redenering
 - Formuleer een vermoeden (of hypothese)
 - Waar lijkt dit op? (analogieën zoeken/gebruiken)
 - Orden de voorbeelden en non-voorbeelden
 - Waarom is dit waar?
 - Hoe kun je dit aanpakken?
 - Hoe verschilt dit van ...? Hoe is dit hetzelfde als ...?
 - Welke van de drie past er niet bij?
 - Orden/categoriseer de voorbeelden
 - Beredeneer dat
 - Demonstreer
 - Ontwerp
 - Geef een voorbeeld van; en nog een; en nog een.
 - Geef aan: Soms waar, nooit waar, altijd waar
 - Wat weet je te vertellen over ... (maak conceptmap)
 - Wat gaat er fout?
 - Kun je een algemene regel formuleren?
 - Bedenk verschillende manieren om de gegevens in een tabel/schema/tekening te zetten
 - Geef zoveel mogelijk bewijzen van ...

Hoe verhouden de hele-taak-eerst en hulp-op-maat zich met recente ontwikkelingen in het wiskunde onderwijs in het voortgezet onderwijs: de wiskundige denkactiviteiten (WDA)?

In de wiskundelessen zijn leerlingen bezig hun gereedschapskistje te vullen met parate kennis van wiskundige concepten en parate vaardigheden, het leren herkennen van (standaard)situaties waarin deze parate kennis en vaardigheden ingezet kunnen worden en het leren van heuristieken ten behoeve van probleemaanpak. Dit houdt in dat een docent expliciet zou moeten aangeven wanneer het gaat om parate kennis en vaardigheden en wanneer er sprake is van herkennen van standaardsituaties en wanneer er sprake is van probleemaanpak. De wiskundige denkactiviteiten worden ingezet bij deze probleemaanpak.

Overzicht van gereedschapskistje voor leerlingen

Parate kennis van wiskundige concepten 'Weten dat'	Parate kennis t.b.v. probleem oplossen Herkennen standaard problemen 'Weten dat plus' (T1 vragen)	Denkactiviteiten t. b.v. probleem oplossen (strategie bedenken of kiezen) 'weten hoe' en 'weten waarom' (T2 en I vragen)
Bijv. mbt hoeveelheden, verbanden, veranderingen, toeval, vorm en ruimte	Inzet wiskundig gereedschap o.a. specifieke algebraïsche vaardigheden Abstraheren = wegdenken context (herkennen van probleem)	analytisch denken & strategisch werken, abstraheren, structureren & ordenen, logisch redeneren & bewijzen, modelleren & algebraïseren, formules manipuleren.

Er lijken (minstens) drie aspecten aan de WDA die problemen kunnen geven als je als docent aan WDA begint in de klas:

1. WDA opdrachten zijn moeilijk te maken
2. WDA in de klas kost tijd en is 'heel anders'
3. WDA zijn te moeilijk voor zwakke leerlingen

Deze problematiek lijkt grotendeels te tackelen met hele-taak-eerst en hulp-op-maat.

Bij het eerste aspect: 'WDA opdrachten zijn moeilijk te maken' kan de strategie 'omdraaien en weglaten' (haal toepassingsopdracht naar voren en laat tussenvragen in eerste instantie weg) goed gebruikt worden. In het bijzonder voor de belangrijke WDA analytisch denken en probleemaanpak lijkt dit een goede strategie. Op CSE worden bij wiskunde A havo en vwo korte onderzoeksopdrachten gevraagd die op deze wijze geconstrueerd worden.

Hulp bij ontwerpen van WDA opgaven

Leerstof	Situatie	(denk) Activiteiten	Product
Weten dat: feiten kennis en procedure kennis	Maatschappelijk Vakperspectieven: hoeveelheden, veranderingen, verbanden, vorm, ruimte, onzekerheden	Leg uit	Grafiek/tekening
Weten waarom: conceptuele kennis		Beredeneer	Redenering
Weten hoe: probleem-aanpak		Teken	Bewijs/argument
Weten over weten: metacognitieve vaardigheden en kennis		Demonstreer	Berekening
	analytisch denken & strategisch werken, abstraheren, structureren & ordenen, logisch redeneren & bewijzen, modelleren & algebraïseren, formules manipuleren	Geef (non)voorbeelden	Beschrijving Uitleg
		Geef bewijs/onderbouwing	Overzicht
		Orden	
		Geef vermoeden	

Bij het derde aspect ‘te moeilijk voor zwakke leerlingen’ kan ‘hulp-op-maat’ helpen. Deze moeilijkheden kunnen divers van aard zijn: ontbreekt het aan parate kennis en vaardigheden van concepten die nodig zijn of ontbreekt het aan vaardigheden om problemen aan te pakken. De hulp, die geboden wordt, kan op zowel product als procesniveau gegeven worden. Bij hulp op productniveau kan gedacht worden aan voorbeelden, een werkblad met al delen ingevuld, tussenvragen. Bij hulp op procesniveau kan gedacht worden aan algemene heuristieken als begrijp de vraag, overweeg verschillende representaties van probleemstelling (bijvoorbeeld grafiek, tabel, of ander schema), maak een stappenplan met deelproblemen, hoe groot verwacht je de uitkomst?, ben je op de goede weg?, enz.

De hulp-op-maat mogelijkheden worden in onderstaand schema weergegeven. De mate van hulp kan nog variëren. In laatste kolom kan de volgorde waarin hulp aangeboden wordt aangegeven worden.

Fasen • Ontwerpen • Uitvoeren • Reflecteren	Type hulp • Algemene uitleg • Uitgewerkt voorbeeld • Oefening	Mate van hulp • Veel • Beperkt • Weinig • Geen	Leerroute		
			A	B	C
Start taak a) Docent deelt taak in delen (keuze) b) Docent organiseert samenwerking tussen leerlingen of leerlingen doen dat c) docent geeft info over achtergrond taak (plaatst deze in grote geheel) of laat dit leerlingen doen (keuze) d) docent activeert voorkennis of leerlingen doen dat zelf (keuze) taak uitvoeren i) docent geeft strategie mogelijkheden (keuze) j) docent geeft proces hulp (wat gedaan? wat is je doel? hoe sta je ervoor?) (keuze) k) docent geeft algemene of specifieke heuristieken (keuze) l) docent legt eerst uit inhoudelijk of enkel strategieën m) docent verwijst naar boek of video of andere methoden m.b.t. theorie, m.b.t. voorbeelden, m.b.t. stappenplan, m.b.t. oefening (gedeeltelijk of geheel) (keuze) n) docent geeft werkblad met structuur (keuze) o) docent geeft stappenplan (keuze) p) docent geeft ICT hulpmiddel (bijv. geogebra bestand of simulatie) (keuze) reflectie/integreren/consolideren f) docent vraagt om tussentijdse controle (keuze) g) leerlingen laten werk checken door ander groepje h) docent stelt controlevragen i) docent geeft aparte taak voor integreren/consolideren (evt. naar keuze) j) docent bespreekt ‘weten over weten’ en/of specifieke heuristieken					

Het tweede aspect ‘het kost tijd in de klas en is heel “anders”’ is lastiger op korte termijn te veranderen. Nadrukkelijk wordt in het Handboek Wiskundendidactiek gesteld dat WDA in alle fasen van het leerproces een rol kunnen krijgen. In iedere fase zullen leerlingen met de op dan bestaande kennis problemen oplossen, zonder dat altijd eerst uitleg of voorbeelden aanwezig zijn. Hierdoor zal het didactisch contract tussen docent en klas gewijzigd worden. Dit is voor veel docenten en leerlingen een enorme wijziging van de cultuur van (wiskunde) leren, omdat in de huidige cultuur vaak memoriseren en op het juiste moment produceren van wiskundige feiten een belangrijke rol heeft. Dergelijke aanpassingen van ‘hoe het in de klas er aan toegaat’ kosten tijd en volharding van docent en leerlingen.