

Deze wiskundeles geeft kinderen inzicht in algoritmen en in het nut van een stappenplan: hoe je daar tijdwinst mee kan maken.

Algoritmen en de toren van Hanoi

In deze les gaan de kinderen aan de slag met de toren van Hanoi. Wat zijn de stappen die je kan zetten om de schijven van de linker- naar de rechterkant te verplaatsen? En hoe kan een stappenplan daarbij helpen?

Wat is het leerdoel van deze les?

- De leerlingen leren dat een algoritme een lijst met stappen in de juiste volgorde (een recept) is
- De leerlingen leren dat het volgen van een stappenplan tijdwinst en een goed antwoord oplevert
- De kinderen leren het spel van de toren van Hanoi

Wat is een algoritme?

Doe eerst boter in de pan en dan pas de eieren. Een algoritme is ook een recept, maar dan voor wiskundigen en computeraars. Als je alle stappen in de juiste volgorde zet, kan het niet misgaan. Maar het kan soms sneller.

De toren van Hanoi

De Franse wiskundige Édouard Lucas heeft in 1883 het spel van de toren van Hanoi bedacht. Hij beschrijft ook een legende over een hindoe-tempel in de Indiase stad Benares onder keizer Fo Hi. De brahmanen, oftewel priesters van deze tempel, zijn bezig met het verplaatsen van een toren van 64 gouden schijven. De schijven liggen op drie naalden van diamant, een el lang en zo dik als het lichaam van een bij. De priesters zeggen dat de wereld tot een einde komt als het werk af is. We weten niet of Lucas deze legende zelf bedacht heeft of hij het inspirerende verhaal van iemand anders heeft gehoord.

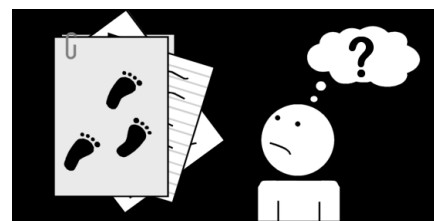
Als de priesters één schijf per seconde zouden verplaatsen, zou het $2^{64} - 1$, is ongeveer $1,84 \times 10^{19}$ seconden duren om de toren te verplaatsen. Dit is ongeveer 585 miljard jaar. Vergeleken met de voorspelde leeftijd van de zon (nog 5 miljard jaar te gaan) is dit erg lang.

Het spel

In eerste instantie is de vraag zo open mogelijk: Hoe kan je de schijven zo snel mogelijk overzetten van de ene kant naar de andere kant? De leerkracht geeft de leerlingen alle vrijheid om een winnende strategie te bedenken.

Er zijn twee regels:

- De kleinste schijf moet altijd boven liggen, bij het verplaatsen mag er dus niet een grote schijf op een kleinere terecht komen.
- En er mag maar één schijf tegelijkertijd verplaatst worden.



De leerlingen proberen het eerst zelf, daarna worden pas strategieën aangeboden. Al proberend worden er makkelijk fouten gemaakt, waardoor het langer duurt voordat de toren is verplaatst. Het is namelijk ook zaak om de schijven zo snel mogelijk naar de andere kant te brengen. Dit stadium van aanrommelen is belangrijk om de leerlingen op speelse wijze te betrekken bij het probleem. Ook is het best mogelijk dat een leerling zelf op één van de strategieën komt.

Laat de leerlingen de tijd opnemen hoe lang ze erover doen.

Oplossingsmethodes

Nadat de leerlingen eerst zelf handmatig de schijven verplaatst hebben, biedt de leerkracht methodes aan om de puzzel systematisch op te lossen. Ook hierbij nemen de leerling op hoe lang ze over een oplossing doen.

Eerste zet:

(0) Is er een oneven aantal schijven, leg dan de eerste schijf op de stok waarop je uiteindelijk wilt eindigen. Is er een even aantal schijven, leg dan de eerste schijf op de andere stok.



Methode 1: Doe om en om de volgende zetten, totdat de oplossing gevonden is:

- (1) Verplaats de schijf die niet de kleinste is volgens de regels (er is nu slechts één mogelijkheid hiervoor).
- (2) Verplaats de kleinste schijf naar de stok waar hij niet het meest recentelijk vandaan kwam. Anders gezegd, verplaats de kleinste schijf steeds van stok 1 naar stok 2, van 2 naar 3, van 3 naar 1 (of steeds andersom).

Methode 2:

- (1) Geef de schijven om en om een andere kleur.
- (2) Verplaats nooit twee keer dezelfde schijf.
- (3) Leg nooit een schijf op een schijf die dezelfde kleur heeft.

Opdracht

Vergelijk de tijden, welke methode (handmatig proberend, methode 1 of methode 2) nam de minste tijd in beslag? Trek daaruit een conclusie over stappenplannen.



Bronnen

Dijkgraag, Robbert, Louise Fresco & Bas Haring. De Bètacanon Junior. www.juniorbetacanon.nl
Wikipedia.org Torens van Hanoi. https://nl.wikipedia.org/wiki/Torens_van_Hanoi
icons: www.sclera.be